Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A del modelo 3 de 2005

[2'5 puntos] Se sabe que $\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha \cdot sen(x)}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el limite.

Solución

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha \cdot sen(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$, Le aplicamos la regla de L'Hôpital (si f(x) y g(x) son continuas en [a – r, a + r], derivables en (a – r, a + r), con f(a) = g(a) = 0, entonces si existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar y también es cierta cuando salga ∞/∞, y cuando $x \to \infty$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha \cdot sen(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \alpha \cdot \cos(x)}{2x} = \frac{1 - \alpha}{0}$$

Como dicen que existe el límite tendríamos que tener 0/0, con lo cual 1 - α = 0, de donde α = 1, y tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 1 \cdot sen(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 \cdot \cos(x)}{2x} = \frac{0}{0}$$

Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 \cdot \cos(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 3 de 2005

Sea f : $\Re \to \Re$ la función definida por f(x) = $\begin{cases} 2x + 4 & si \quad x \le 0 \\ (x-2)^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$.

(a) [1 punto] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.
(b) [1'5 puntos] Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

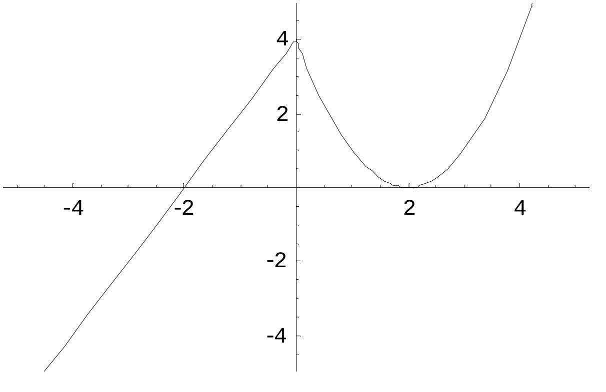
Solución

(x) = $\begin{cases} 2x + 4 & si \quad x \le 0 \\ (x-2)^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$.

(a)
Los cortes con abscisas se obtienen resolviendo f(x) = 0
Si x ≤ 0, 2x + 4 = 0, de donde x = -2. Punto de corte (-2,0)
Si x > 0, $(x – 2)^2$ = 0, de donde x = 2 (doble). Punto de corte (2,0)

2x + 4, es una recta y su gráfica es trivial. Con dos puntos es suficiente para dibujarla, uno es el (0,4) y el otro el (-2,0)

$(x – 2)^2$ es una parábola igual que x^2 pero desplazada 2 unidades hacia la derecha en abscisas.
Su gráfica es



(b)

$$Area = \int_{-2}^{0} (2x+4)dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2 dx = \left[x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}$$ = [(0) – (4-8)] + [(0) - (-8/3)] = 4 + 8/3 = 20/3 u^2

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 3 de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$(b + 1)x + y + z = 2$$
$$x + (b + 1)y + z = 2$$
$$x + y + (b + 1)z = -4$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro b.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

$$(b + 1)x + y + z = 2$$
$$x + (b + 1)y + z = 2$$
$$x + y + (b + 1)z = -4$$

Sea A = $\begin{pmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A^* = $\begin{pmatrix} b+1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b+1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b+1 & -4 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Para que el sistema tenga solución única, por el Teorema de Rouche, rango(A) = rango(A^*) = 3, por tanto el determinante de A tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} \underset{1^a+2^a+3^a}{=} \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ b+3 & b+3 & b+3 \end{vmatrix} = (b+3)\begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^aC-1^aC \\ 3^aC-1^aC \end{matrix} =$$

$$= (b+3)\begin{vmatrix} b+1 & -b & -b \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (b + 3)(1)(b^2)$$

Si |A| = 0, tenemos $(b + 3)(1)(b^2) = 0$, de donde b = -3 y b = 0.

Por tanto **para b ≠ 0 y b ≠ - 3 el sistema tiene solución única. Es compatible y determinado.**

Si b = 0

Tenemos A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Vemos que rango(A) = 1, pues las tres filas son iguales.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ = - 6 ≠ 0, tenemos rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = 1 ≠ rango(A^*) = 2, por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si b = - 3

Tenemos A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A^* = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 3 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ = 0, tenemos rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, por el Teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado.

Tomamos dos ecuaciones (las dos primeras) y dos incógnitas principales. Tomamos las dos primeras ecuaciones:

-2x + y + z = 2

x - 2y + z = 2. Hago z = t con $t \in \Re$

-2x + y = 2 – t
x - 2y = 2 – t $\rightarrow$ 2ª + 1ª(2)

-2x + y = 2 – t
-3x = 6 – 3t $\rightarrow$ 3x = – 6 + 3t , de donde x = - 2 + t. Sustituyendo en la 1ª tenemos

y = 2(- 2 + t) + 2 – t = -2 +t.

La solución del sistema en este caso es (x, y, z) = (- 2 + t, -2 +t, t) con t $\in \Re$.

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 3 de 2005

Se sabe que las rectas r $\equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ y s $\equiv \begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$ son paralelas.

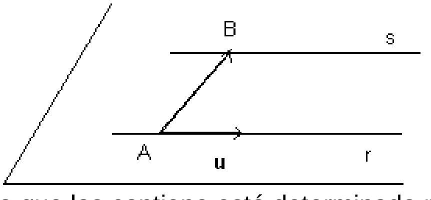
(a) [1'5 puntos] Calcula a.
(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución

(a)
Como las rectas r $\equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ y s $\equiv \begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$ son paralelas, sus vectores directores **u** y **v** son paralelos, es decir sus coordenadas son proporcionales.

u = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(2) – **j**(1) + **k**(1) = (2, -1, 1); **v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ = **i**(-12) – **j**(-2a) + **k**(-6) = (-12, 2a, -6)

Al ser proporcionales, -12/2 = 2a/-1 = -6/1, de donde 2a = 6 y a = 3.
(b)



Como las rectas son paralelas el plano que las contiene está determinado por un punto A de la recta r, su vector director **u** y el vector **AB** siendo B un punto de la recta s.

De la recta r $\equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$, tomando y = 0, sale x = 2 y z = -1.
Punto A(2, 0, -1). Vector director **u** = (2, -1, 1)

De la recta s $\equiv \begin{cases} 3x+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$, tomando z = 0, sale x = -2 e y = 0.
Punto B(-2, 0, 0). Vector director **u** = (2, -1, 1)
Vector **AB** = (-4, 0, 1)

El plano pedido es det (**AX**, **u**, **AB**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = (x-2)(-1) – (y)(6) + (z+1)(-4) = -x -6y -4z - 2 = 0

Opción B

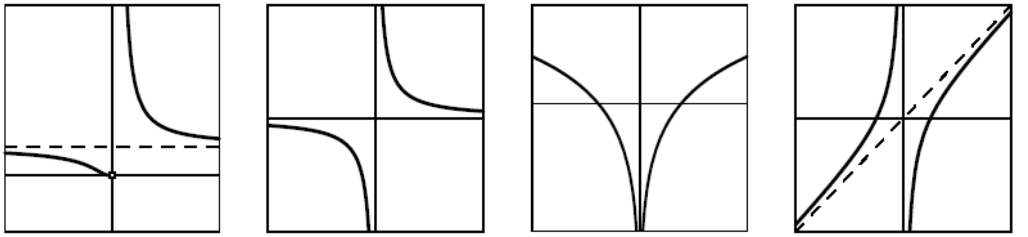
Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 3 de 2005

Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para x ≠ 0, por

$$f(x) = (x^2 - 1)/x, \qquad g(x)= e^{1/x} \qquad y \qquad h(x) = Ln\,|x|,$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) [1'75 puntos] Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h.
(b) [0'75 puntos] Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3 Gráfica 4

Solución

$f(x) = (x^2 - 1)/x$, $g(x)= e^{1/x}$ y $h(x) = \text{Ln } |x|$,

(a) y (b)

$f(x) = (x^2 - 1)/x$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, la recta x = 0 es una asíntota vertical (A.V.) de la gráfica de f

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$, para ver la posición relativa.

$f(x) = (x^2 - 1)/x$ tiene una asíntota oblicua (A.O.) y = mx + n, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$ por ser un cociente de polinomios con el numerador un grado mas que el denominador.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = 0$$

La asíntota oblicua es y = mx + n = x

Como $\lim_{x\to +\infty}$ (f(x) - asintota) = 0^-, f(x) está por debajo de la A.O. y = x en $+\infty$

Como $\lim_{x\to -\infty}$ (f(x) - asintota) = 0^+, f(x) está por encima de la A.O. y = x en $-\infty$

Por todo lo anterior la gráfica de $f(x) = (x^2 - 1)/x$ es **la gráfica nº 4**

$g(x)= e^{1/x}$

Como $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$, la recta y = 1 es una asíntota horizontal (A.H.) de la gráfica de g en $+\infty$

Como $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{-x}} = e^0 = 1$, la recta y = 1 es una asíntota horizontal (A.H.) de la gráfica de g en $-\infty$

Veamos la posición relativa

Como $\lim_{x\to +\infty}$ (g(x) - asintota) = 0^+, g(x) está por encima de la A.H. y = 1 en $+\infty$

Como $\lim_{x\to -\infty}$ (g(x) - asintota) = 0^-, g(x) está por debajo de la A.H. y = 1 en $-\infty$

Como $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \infty$, la recta x = 0 es una asíntota vertical (A.V.) de la gráfica de g en x=0

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$.

Por todo lo anterior la gráfica de $g(x)= e^{1/x}$ es **la gráfica nº 1**

h(x) = Ln|x|

Como $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} Ln|x| = Ln|0^+| = Ln(0^+) = -\infty$, la recta x=0 es una asíntota vertical (A.V.) de la gráfica de h

$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} Ln|x| = Ln|0^-| = Ln(0^+) = -\infty$,

Como $\lim_{x\to \pm\infty}$ h(x) = $\lim_{x\to \pm\infty}$ $\text{Ln}|x| = \text{Ln}|\pm\infty| = \text{Ln}(+\infty) = +\infty$, h(x) se acerca a + ∞ cuando x se acera a ± ∞.

Por todo lo anterior la gráfica de h(x) = Ln|x| es **la gráfica nº 3**

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 3 de 2005

[2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^{0} Ln(2+x)dx$ siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Solución

I = $\int_{-1}^{0} Ln(2+x)dx$

I_1 = $\int Ln(2+x)dx$ es una integral por partes (Aplicamos $\int udv = uv - \int vdu$)

Tomamos u = Ln(2 + x) y dv = dx, con lo cual du = [1/(Ln(2+x))] dx y v = x

I_1 = $\int Ln(2+x)dx = x.Ln(2+x) - \int \frac{x}{x+2}dx$ = x.Ln(x+2) - I_2

I_2 = $\int \frac{x}{x+2}dx$ es una integral racional por tanto antes de calcularla hemos de dividir el numerador entre el denominador para que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador.

$$\begin{array}{l|l} x & x+4 \\ \hline -x-2 & 1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

I_2 = $\int \frac{x}{x+2}dx = \int\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)dx$ = x – 2Ln|x+2|. De donde

I_1 = x.Ln(x+2) - I_2 = x.Ln(x+2) - x + 2Ln|x+2|. Por tanto

I = $\int_{-1}^{0} Ln(2+x)dx = \left[x.Ln(2+x) - x + 2Ln(2+x)\right]_{-1}^{0}$ = [(0 -0 +2Ln(2)) – ((-1)Ln(1) –(-1) +2Ln(1))] = 2Ln(2) – 1

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 3 de 2005

Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Determina el valor de b para el que $A^2 - 2A + I = O$.
(b) [1'25 puntos] Para b = 2 halla la matriz X que cumple que $A \cdot X - 2A^t = O$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a)

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & b^2-1 \end{pmatrix}$; $2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2b \end{pmatrix}$

$A^2 - 2A + I = 0$ es

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & b^2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Operando obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 2-b \\ -2+b & 0 & -2b+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Igualando miembro a miembro tenemos

2 – b = 0 (tres veces), de donde b = 2
-2b + b^2 = 0, de donde b = 0 y b = 2
Luego la única solución que verifica las cuatro ecuaciones es b = 2.
(b)
Para b = 2, calcula X
A.X – $2A^t$ = 0, de donde A.X = $2A^t$
Para que A tenga inversa A^{-1} su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1 \neq 0$$, luego existe $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$

Multiplicamos la expresión A.X = $2A^t$ por la izquierda por la inversa A^{-1}
A^{-1}. A.X = A^{-1}. $2A^t$, operando
I.X = $2A^{-1}$. A^t,
X = $2A^{-1}$. A^t
Calculamos $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = 2A^{-1}.\ A^t = 2.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 3 de 2005

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv x/2 = y - 1 = z/3$.

(a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r.
(b) [1'25 puntos] Calcula la distancia de la recta r al plano π.

Solución

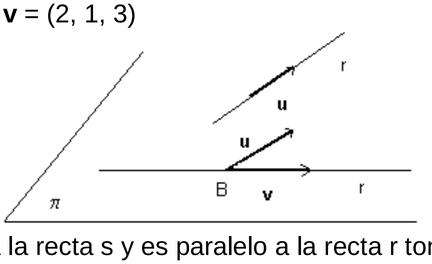
(a)
$r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv x/2 = y - 1 = z/3$. De cada recta tomo un punto y un vector director.

Antes pongo la recta r en paramétricas. Tomo x = t, con lo cual y = - 1 + t y z = 2 – t por tanto

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$$

De r punto A(0, -1, 2) y vector director **u** = (1, 1, -1)
De s punto B(0, 1, 0) y vector director **v** = (2, 1, 3)

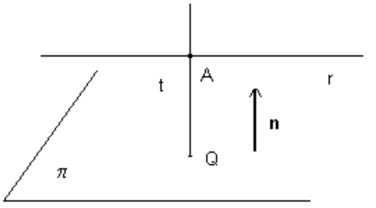
Como 1/2 ≠ 1/1, los vectores **u** = (1, 1, -1) y
De s punto B(0, 1, 0) y vector director **v** = (2, 1, 3)



Como piden el plano π que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r tomo como punto un punto de la recta s, el B, y como vectores el de s, el **v**, y el de la recta r, el **u**.

$\pi \equiv \det(\mathbf{BX},.\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x)(-4) - (y+1)(-5) + (z)(1) = -4x + 5y + z + 5 = 0.$

(b)
Para calcular la distancia de la recta r al plano π, al ser el plano π paralelo a la recta r, solo hay que calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta r, el A, al plano π.



Trazo la recta t perpendicular al plano π por el punto A. El vector director de la recta t es el vector normal del plano π, **n** = (-4, 5, 1)

Recta t $\equiv \begin{cases} x = -4m \\ y = -1+5m \\ z = 2+m \end{cases}$, con m $\in$ R

El punto Q es la intersección de la recta t con el plano π
-4(-4m) + 5(-1+5m) + (2+m) + 5 = 0, de donde 42m = - 2, y m = -1/12. Luego el punto Q es
Q(-4(-1/12), -1 + 5(-1/12), 2 + (-1/12)) = Q(4/21, -26/21, 41/21)

AQ = (4/21 – 0, -26/21 –(-1), 41/21 – 2) = (4/21, -5/21, -1/21)

d(r, π) = d(A,Q) = ||**AQ**|| = $\sqrt{\frac{4^2}{21^2}+\frac{5^2}{21^2}+\frac{1^2}{21^2}} = \sqrt{\frac{42}{21^2}} = \frac{\sqrt{42}}{21} u.l.$